LEKCIJE IZ MATEMATIKE 1

Ivica Gusić

Lekcija 1

Realni i kompleksni brojevi

Lekcije iz Matematike 1.

1. Realni i kompleksni brojevi

I. Naslov i objašnjenje naslova

U lekciji se ponavljaju osnovna svojstva brojeva, pojmovi vezani uz brojeve i operacije s brojevima. Obrađuje se trigonometrijski prikaz kompleksnog broja.

II. Pripadni inženjerski odnosno matematički problem

Brojevima se rješavaju dva temeljna praktična problema:
brojenje, prebrojavanje - pomoću prirodnih brojeva.
mjerenje - pomoću realnih brojeva.
Iako kompleksni brojevi imaju i fizikalnu i geometrijsku primjenu, oni su prvenstveno uvedeni iz teoretskih razloga - da bi svaka algebarska jednadžba imala rješenje.

III. Potrebno predznanje

Poznavanje osnovnih skupova brojeva i operacija s njima:

Skup prirodnih brojeva N. Primjeri: $1, 2, 3, ..., 25, ...$

Skup cijelih brojeva Z. Primjeri: $0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, ...$
Svaki je prirodni broj ujedno i cio, međutim, ima cijelih brojeva koji nisu prirodni - to su negativni cijeli brojevi i broj 0.

Skup racionalnih brojeva Q. Primjeri: $\frac{1}{2}, \frac{2}{25} - \frac{2}{3}, \frac{17}{12}, ...$ Općenito, broj je racionalan ako se može predočiti kao razlomak s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom. Svaki je cijeli broj (dakle i prirodni) ujedno i racionalan, međutim ima racionalnih brojeva koji nisu cijeli. Na primjer, $\frac{1}{2}$ je racionalan, ali nije cio broj.

Skup realnih brojeva R - skup kojeg čine racionalni i **iracionalni** brojevi. Primjeri:

$$1, 0, -7, \frac{2}{5}, \pi, \sqrt{2}, \sqrt[5]{6}, ...$$

Svaki je racionalni broj (dakle i cijeli, prirodni) ujedno i realan, međutim ima realnih brojeva koji nisu racionalni. Na primjer, $\pi, \sqrt{2}, \sqrt[5]{6}$ nisu racionalni već iracionalni (ne mogu se predočiti kao razlomak s cjelobrojnim brojnikom i nazivnikom).
Intuitivno, pozitivni realni brojevi jesu brojevi kojima se može izmjeriti svaka

dužina.

Decimalni zapis realna broja. Primjeri: 3.14, 3.16, 1.732, $-2.1313...$,...
(prva tri su konačni, a četvrti je beskonačan).
Svaki konačan decimalni zapis može se shvatiti i kao beskonačan. Na primjer,

$$0.5 = 0.5000...,\ 0.08 = 0.08000...$$

međutim, ima brojeva koji nemaju konačan decimalni zapis, primjerice broj sa zapisom $-2.1313...$.
Racionalni brojevi imaju konačan ili beskonačan **periodan** decimalni zapis. Na primjer:

$$\frac{1}{2} = 0.5,\ \frac{2}{25} = 0.08,\ -\frac{2}{3} = -0.666...,\frac{17}{12} = 1.41666...,-\frac{211}{99} = -2.1313...$$

Iracionalni brojevi imaju beskonačan **neperiodan** zapis.
Na primjer, zapis 1.010010001... (broj nula u zapisu između dviju jedinica povećava se za 1) je neperiodan pa je to zapis iracionalna broja.
Često se umjesto **decimalni zapis** govori **decimalni broj**. Ako se to prihvati, onda je skup realnih brojeva upravo skup decimalnih brojeva.

Znanstveni zapis (notacija) realna broja - to je zapis pomoću potencije broja 10 (naročito pogodan za vrlo velike i vrlo male brojeve).

Primjer 1. $375.26 = 3.7526 \cdot 10^2$ (desno je znanstveni, a lijevo običan decimalni). Slično:
$37.526 = 3.7526 \cdot 10^1$
$3.7526 = 3.7526 \cdot 10^0$
$0.37526 = 3.7526 \cdot 10^{-1}$
$0.0000375.26 = 3.7526 \cdot 10^{-5}$
$3752.6 = 3.7526 \cdot 10^3$

U decimalnom zapisu nekog broja prva znamenka različita od nule zove se i **prva značajna znamenka**. Treba uočiti njeno značenje pri određivanju znanstvenog zapisa.

Skup kompleksnih brojeva C. Primjeri:

$$2 + 3i, 2 - 3i, \sqrt{2}i, i, ...$$

i je **imaginarna jedinica** i ima svojstvo

$$i^2 = -1$$

(zato ona nije realan broj, naime kvadrat realnog broje ne može biti negativan).
Svaki se kompleksni broj može zapisati kao $a + bi$ (taj se zapis često naziva **algebarskim zapisom**). Tu je a **realni dio**, a b **imaginarni dio**. Algebarski zapis kompleksna broja je jedinstven. Ta se vrlo važna činjenica kraće može zapisati kao:

$$Ako\ je\ a + bi = c + di\ onda\ je\ a = c\ i\ b = d$$

Broj oblika bi je **čisto imaginaran**, primjerice, $3i, \sqrt{2}i, ...$,
brojevi $a+bi$ i $a-bi$ međusobno su **kompleksno konjugirani**. Na primjer, brojevi $2+3i$ i $2-3i$ su kompleksno konjugirani, također i brojevi $2i$ i $-2i$. Kompleksno konjugirani broj broja z označavamo s crticom iznad z, dakle $\bar{z}$. Svaki je realni broj (dakle i racionalni, cijeli, prirodni) ujedno i kompleksan (imaginarni dio mu je 0), međutim ima kompleksnih brojeva koji nisu realni (to su upravo oni kojima je imaginarnio dio različit od 0).

Algebarske operacije s brojevima. Poznato je da se realni brojevi mogu zbrajati i množiti (i da operacije zbrajanja i množenja imaju određena svojstva). Pritom su zbroj i umnožak racionalnih brojeva opet racionalni brojevi (slično je za cijele i prirodne). Oduzimanje možemo shvatiti kao zbrajanje sa **suprotnim brojem**:

$$a-b=a+(-b)$$

a dijeljenje kao množenje s **recipročnim brojem**:

$$a:b=a\frac{1}{b}$$

S nulom se ne može dijeliti! Drugim riječima, nula ne može biti nazivnik nekog razlomka.

Kompleksni se brojevi zbrajaju (i oduzimaju) prema pravilu: *realan s realnim, imaginaran s imaginarnim.* Dakle:

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i; \quad (a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$$

Na primjer: $(2+3i)+(4-5i)=6-2i$; $(2+3i)-(4-5i)=-2+8i$.

Kompleksni se brojevi množe prema pravilu *svaki sa svakim*, pritom se koristi činjenica da je $i^2=-1$. Dobije se:

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Na primjer $(2+3i)(4-5i)=23+2i$.

Množenje realnog i kompleksnog broja je jednostavnije:

$$\lambda(a+bi)=(\lambda a)+(\lambda b)i$$

Na primjer, $5(2+3i)=10+15i$.

Dijeljenje se svodi na množenje proširivanjem s konjugiranim nazivnikom. Na primjer:

$$(2+3i):(4-5i)=\frac{2+3i}{4-5i}=\frac{2+3i}{4-5i}\cdot\frac{4+5i}{4+5i}=\frac{-7+22i}{41}=\frac{-7}{41}+\frac{22}{41}i$$

Pri množenju nazivnika primijenili smo formulu za razliku kvadrata:

$$(4-5i)(4+5i)=4^2-(5i)^2=16-(-25)=41$$

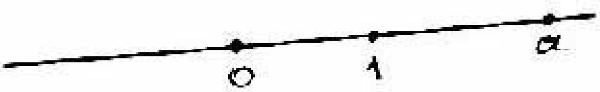
Općenito vrijedi (množenje kompleksno-konjugiranih brojeva):

$$(a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$$

(rezultat je uvijek pozitivan, osim ako je $a = b = 0$).

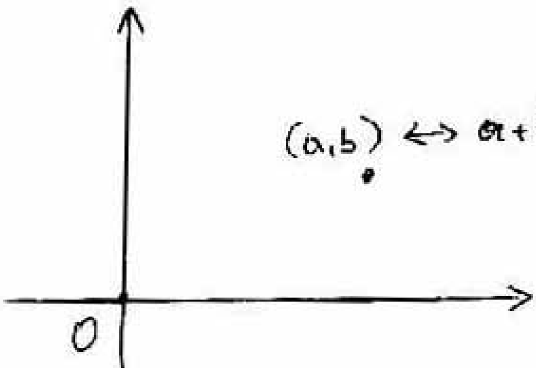
Geometrijsko predočavanje brojeva

Realni se brojevi geometrijski predočavaju **brojevnim (koordinatnim) pravcem** - pravcem na kojemu su istaknute dvije točke: jedna odgovara broju 0, to je **ishodište koordinatnog sustava**, a druga broju 1 (time je određena **jedinična duljina** - udaljenost od broja 0 do broja 1 na pravcu. Pri ovo predočavanju svakoj točki pravca odgovara točno jedan realan broj (**koordinata točke**) i svakom realnom broju točno jedna točka pravca (Slika 1).



Sl. 1 Koordinatni pravac

Kompleksni se brojevi geometrijski predočavaju koordinatnom ravninom (**kompleksnom ravninom**) tako da se kompleksni broj $a + bi$ poistovijeti s **uređenim parom** realnih brojeva (a, b), a taj uređeni par s točkom koordinatne ravnine (Slika 2). Pritom su realni brojevi predočeni pravcem (kao i prije), čisto imaginarni pravcem okomitim na taj pravac, a broj 0 je u ishodištu koordinatnog sustava (u presjeku tih dvaju pravaca).

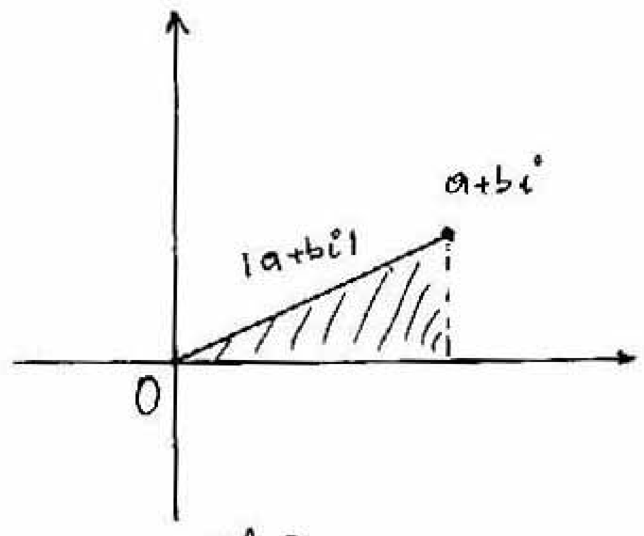


Sl. 2 Kompleksna ravnina

Apsolutna vrijednost broja

Apsolutna vrijednost $|a|$ realnog broja a je udaljenost tog broja od nule na brojevnom pravcu. Na primjer $|2| = 2$, $|-2| = 2$, $|0| = 0$. Općenito je $|a| = |-a|$ tj. uvijek po dva broja, broj i njemu suprotni broj imaju istu apsolutnu vrijednost (izuzetak je 0, ali to, na neki način vrijedi i za nju jer je nula sama sebi suprotna).
Slično je za kompleksne brojeve: apsolutna vrijednost $|a+bi|$ kompleksnog broja $a+bi$ je njegova udaljenost od ishodišta u kompleksnoj ravnini. Vidimo (Slika 3) da je (iz Pitagorina poučka):

$$|a+bi| = \sqrt{a^2+b^2}$$



sl.3

Na primjer: $|3+4i| = 5$, $|2+3i| = \sqrt{13}$, $|3i| = 3$.
Vidimo da vrijedi $|a+bi| = \sqrt{(a+bi)(a-bi)}$, kraće

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$

Kao poseban slučaj formule za apsolutnu vrijednost kompleksna broja dobije se formula za apsolutnu vrijednost realna broja:

$$|a| = \sqrt{a^2}$$

Naime, $|a| = |a+0\cdot i| = \sqrt{a^2+0^2} = \sqrt{a^2}$

Uspoređivanje brojeva

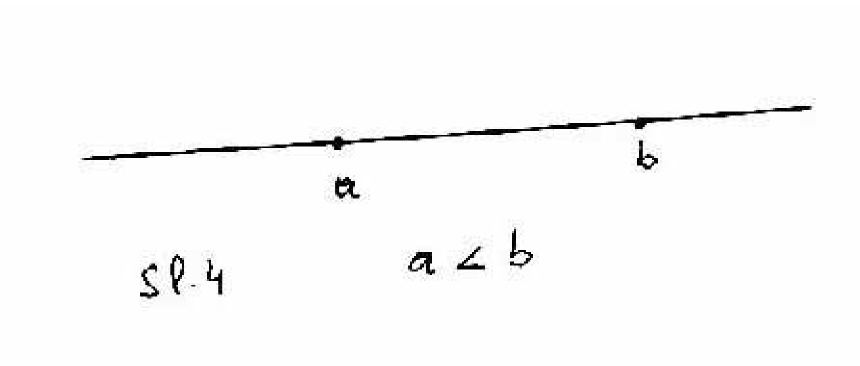
Operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja s kompleksnim brojevima imaju ista svojstva kao i operacije s realnim (odnosno racionalnim) brojevima. Jedna od važnih razlika je u tome što se realni brojevi mogu uspoređivati:

za svaka dva realna broja a, b vrijedi

$$a = b \text{ ili } a < b \text{ ili } a > b$$

dok to za kompleksne brojeve ne vrijedi (oni se mogu uspoređivati samo po apsolutnim vrijednostima). Vidimo da vrijedi (Slika 4):

$$a < b \text{ ako je } a \text{ lijevo od } b \text{ na brojevnom pravcu}$$

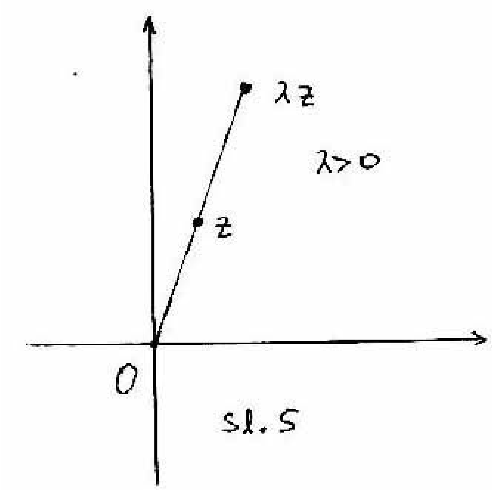


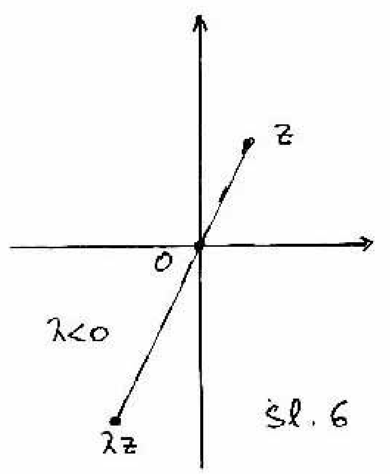
Također

$$a < b \text{ ako je } b - a > 0$$

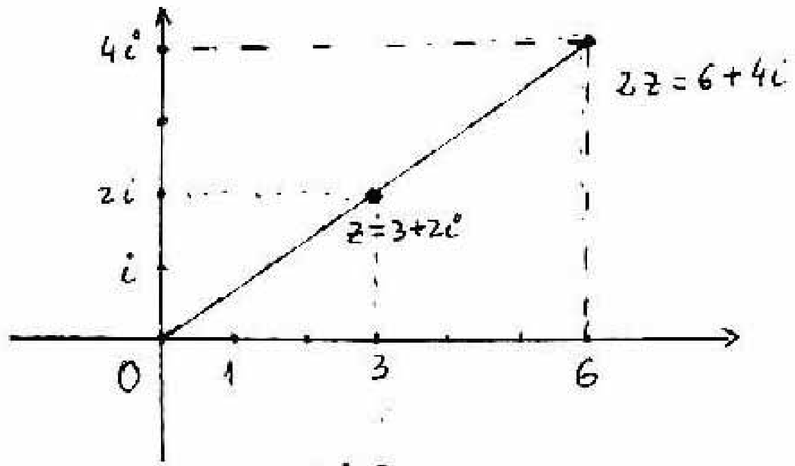
Geometrijsko predočavanje umnoška realnog i kompleksnog broja

Kompleksan broj $z \neq 0$ i njegov umnožak λz s realnim brojem $\lambda \neq 0$ čine posebnu geometrijsku konfiguraciju:
Brojevi z i λz su na pravcu koji prolazi ishodištem; pritom su oni s iste strane ishodišta ako je $\lambda > 0$, a s različitih strana ako je $\lambda < 0$ (Slike 5 i 6).



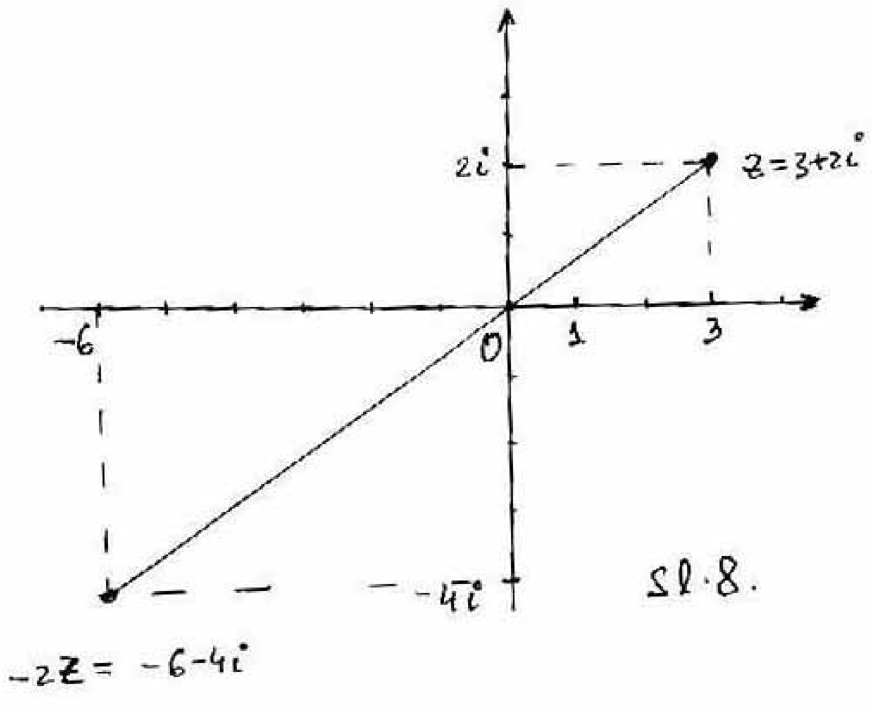


Primjer 2.
(i) Brojevi $z = 3 + 2i$ i $2z = 6 + 4i$ na istoj su zraci koja počinje u ishodištu (Slika 7).



Sl. 7.

(ii) Brojevi $z = 3{+}2i$ i $-2z = -6{-}4i$ na istom su pravcu koji prolazi ishodištem, ali s različitih strana ishodišta (Slika 8).

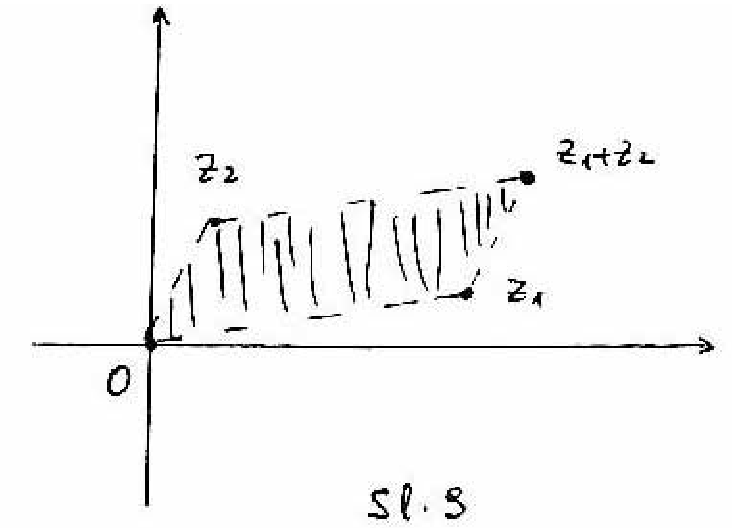


Sl. 8.

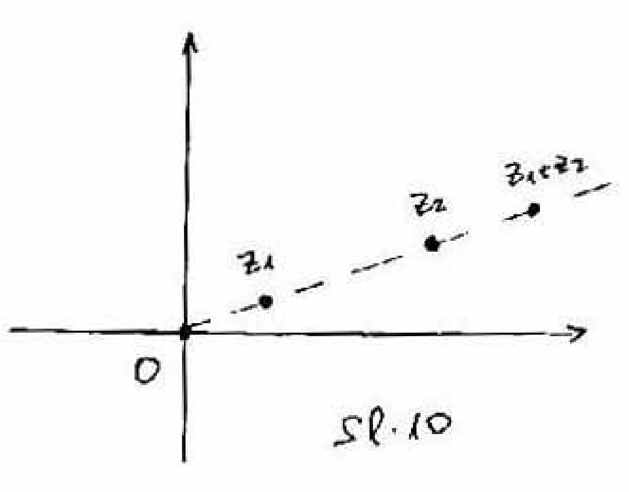
Geometrijsku predodžbu umnoška (odnosno kvocijenta) dvaju kompleksnih brojeva opisat ćemo poslije.

Geometrijsko predočavanje zbroja i razlike kompleksnih brojeva

Kompleksni brojevi $z_1, z_2, z_1 + z_2$ i 0 jesu vrhovi paralelograma; pritom su z_1, z_2 jedan par nasuprotnih vrhova, a $0, z_1 + z_2$ drugi (Slika 9).

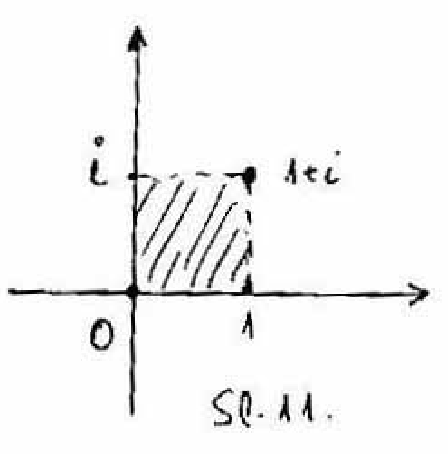


Izuzetak je samo ako su z_1, z_2 na istom pravcu koji prolazi ishodištem, na primjer ako su oba realni. Tada su sva četiri broja na istom pravcu - degenerirani paralelogram (Slika 10).

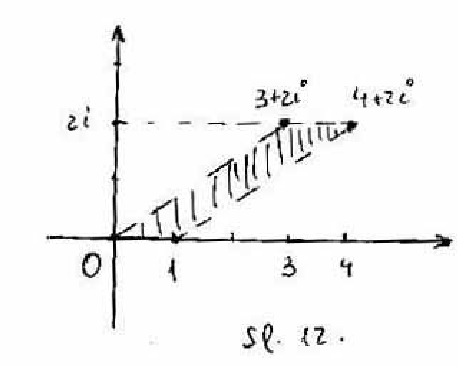


To je zato što je tada $z_2 = \lambda z_1$ za neki realni broj λ (gledamo slučaj kad su z_1, z_2 različiti od nule). Zato je $z_1 + z_2 = (1 + \lambda)z_1$ pa su svi brojevi na istom pravcu kroz ishodište.

Primjer 3. (i) Brojevi $1, i, 1 + i, 0$ vrhovi su kvadrata (pri čemu su $1, i$ nasuprotni vrhovi (Slika 11).

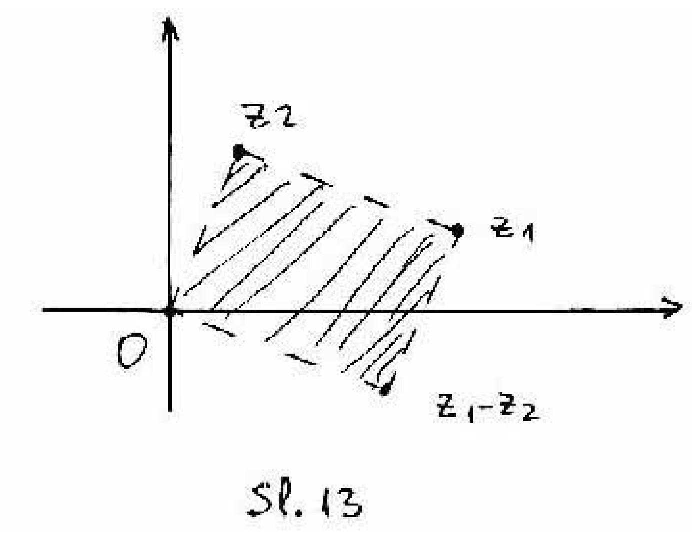


(ii) Brojevi $1, 3+2i, 4+2i, 0$ vrhovi su paralelograma (Slika 12).



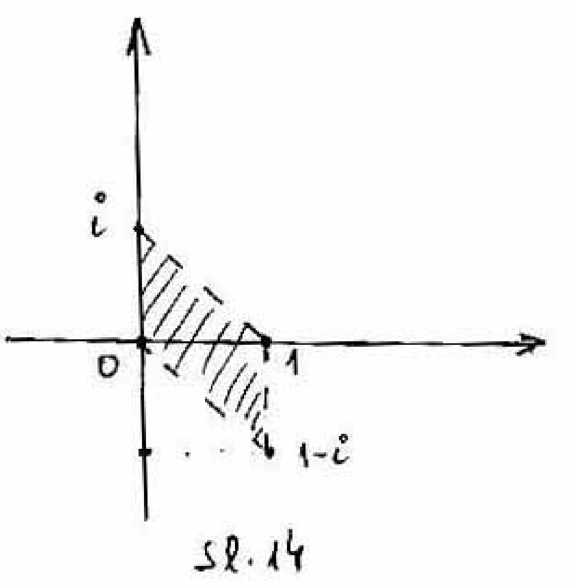
(iii) Brojevi $2+3i, -4-6i, -2-3i, 0$ na istom su pravcu (tu je $z_2 = -2z_1$).

Kompleksni brojevi $z_1, z_2, z_1 - z_2$ i 0 jesu vrhovi paralelograma; pritom su $z_1, 0$ jedan par nasuprotnih vrhova, a $z_2, z_1 - z_2$ drugi (Slika 13).

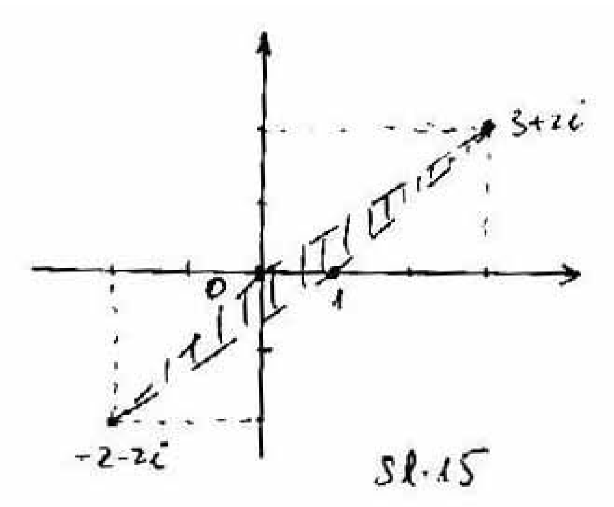


Kao i kod zbrajanja, postoje izuzeci.

Primjer 4. (i) Brojevi $1, i, 1-i, 0$ vrhovi su paralelograma (pri čemu su $1, 0$ nasuprotni vrhovi (Slika 14).



(ii) Brojevi $1, 3+2i, -2-2i, 0$ vrhovi su paralelograma (Slika 15).

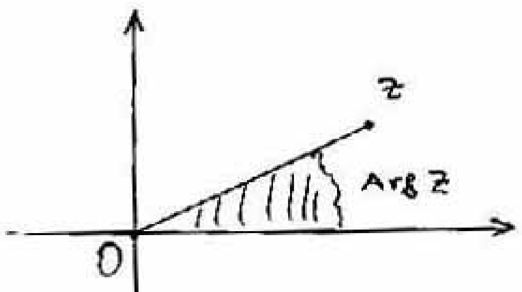


(iii) Brojevi $2+3i, -4-6i, 6+9i, 0$ na istom su pravcu.

IV. Nove definicije i tvrdnje

Trigonometrijski prikaz kompleksna broja

Neka je $z = a + bi$ kompleksan broj različit od 0. Tada spojnica broja z s ishodištem kompleksne ravnine čini kut s pozitivnom realnom zrakom. Taj se kut zove **argument** ili kut kompleksnog broja z i označava kao $Arg(z)$ (Slika 16).



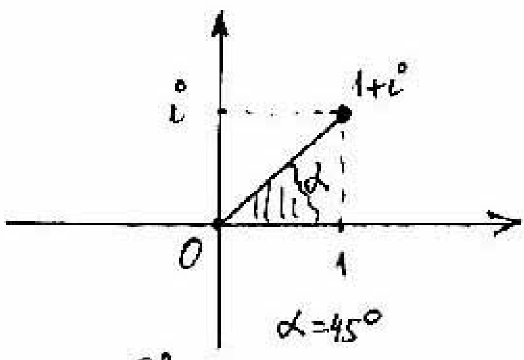
Sl. 16

Vidimo da je

$$0 \leq Arg(z) < 360°$$

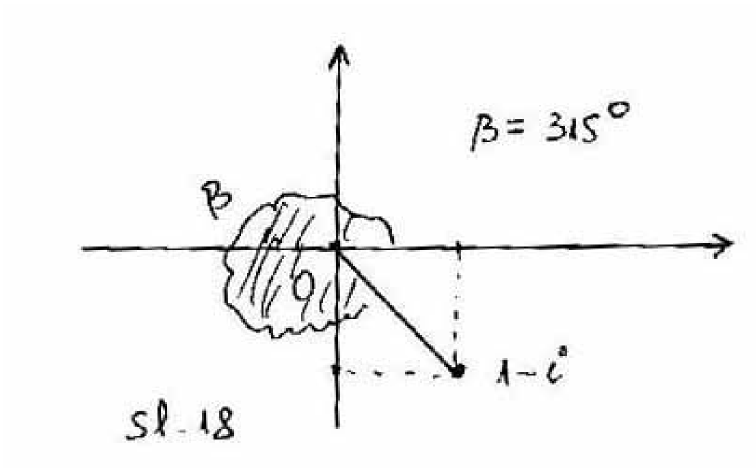
Kad god to ne bude stvaralo zabunu, argument kompleksnog broja označavat ćemo, kako i inače označavamo mjere kuta, grčkim slovima.

Primjer 5.
(i) Argument kompleksnog broja $z = 1 + i$ je $45°$. Pišemo $Arg(z) = 45°$ ili $arg(1 + i) = 45°$ ili, jednostavno, $\alpha = 45°$ (Slika 17).

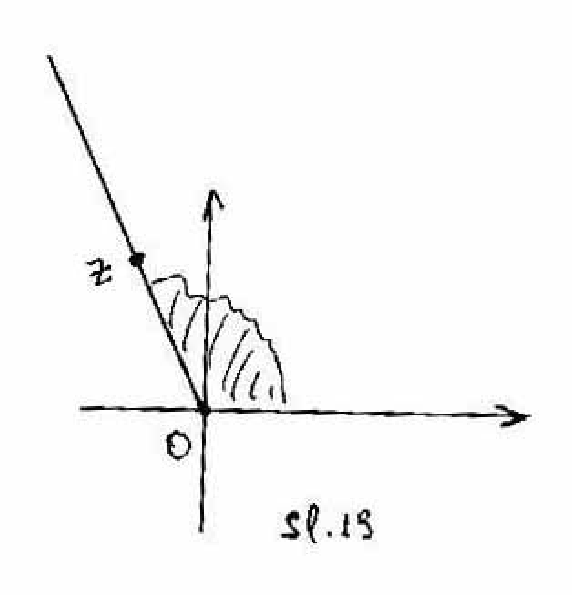


Sl. 17

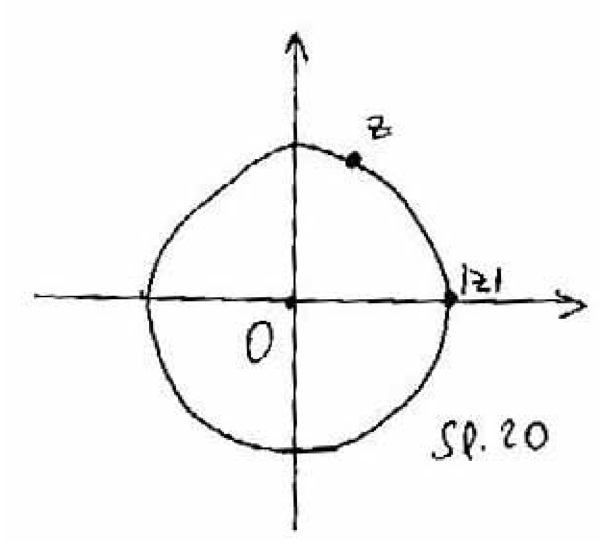
(ii) Argument kompleksnog broja $z = 1 - i$ je $360° - 45° = 315°$. Pišemo $Arg(z) = 315°$ ili $arg(1 - i) = 315°$ ili, jednostavno, $\beta = 315°$ (Slika 18).



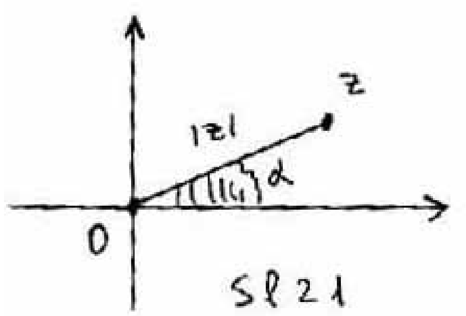
Treba uočiti sljedeće tri važne činjenice:
1. Kompleksni brojevi koji imaju isti argument kao i z čine u kompleksnoj ravnini zraku s početkom u ishodištu koja prolazi kroz z, bez samog ishodišta (Slika 19).



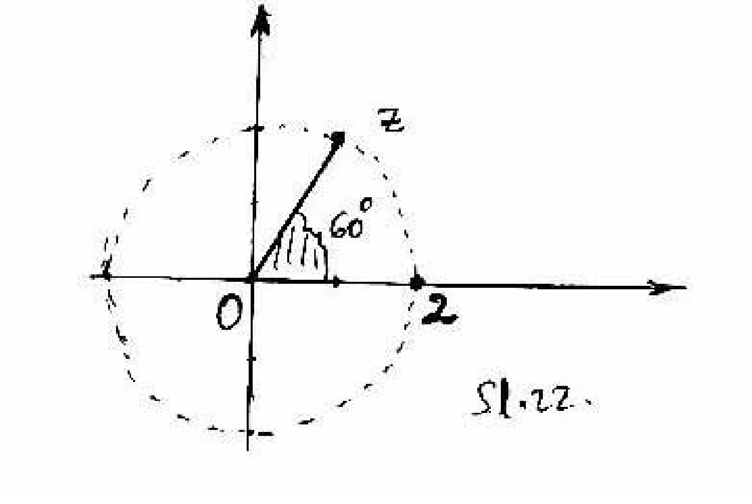
2. Kompleksni brojevi koji imaju istu apsolutnu vrijednost kao i z čine u kompleksnoj ravnini kružnicu sa središtem u ishodištu koja prolazi kroz z, dakle ima polumjer $|z|$ (Slika 20).



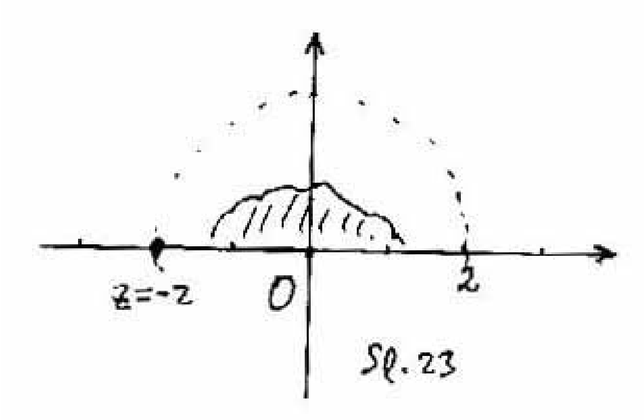
3. Svaki je kompleksni broj z različit od 0 jednoznačno određen svojim argumentom (kutom) i svojom apsolutnom vrijednošću (Slika 21).



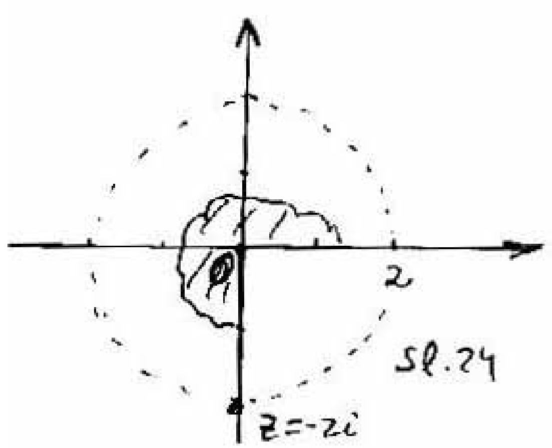
Primjer 6. Prikažimo u kompleksnoj ravnini kompleksni broj z ako je:
(i) $|z| = 2$ i $\alpha = 60°$ (Slika 22)



(ii) $|z| = 2$ i $\alpha = 180°$ (Slika 23)

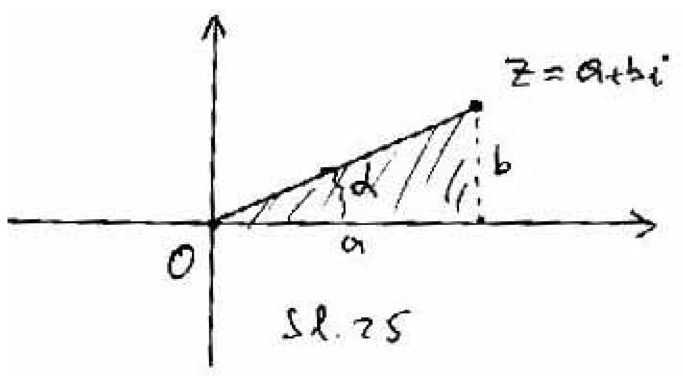


(iii) $|z| = 2$ i $\alpha = 270°$ (Slika 24)



Iz $\cos\alpha = \frac{a}{|z|}$ i $\sin\alpha = \frac{b}{|z|}$, dobijemo (Slika 25),

$$z = a + bi = |z|\cos\alpha + |z|\sin\alpha \cdot i = |z|(\cos\alpha + \sin\alpha \cdot i)$$



To je **trigonometrijski prikaz** kompleksnog broja. Obično se piše tako da i i $\sin\alpha$ zamijene mjesta

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

Primjer 7. Odredimo trigonometrijski prikaz kompleksnih brojeva iz Primjera 5.

(i) $z = 1 + i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\alpha = 45^\circ$ pa je:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ)$$

(ii) $z = 1 - i$, $|z| = \sqrt{2}$, $\beta = 135^\circ$ pa je:

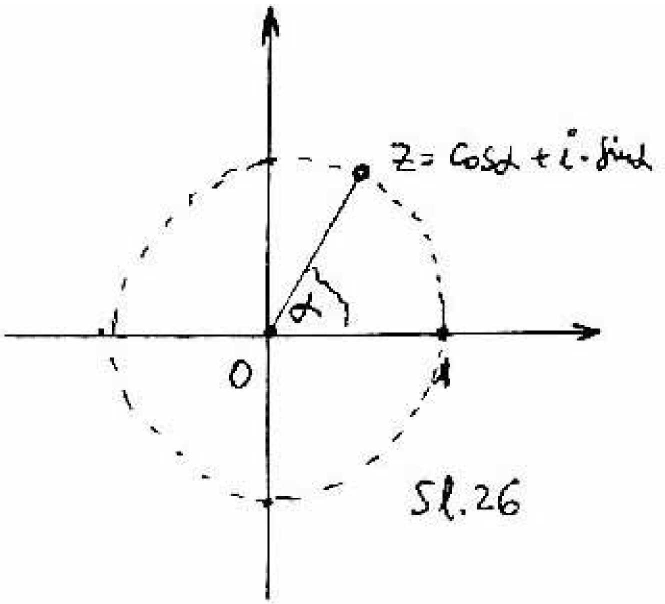
$$z = |z|(\cos\beta + i\sin\beta) = \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i\sin 135^\circ)$$

Primjer 8. Odredimo kompleksni broj z (tj. odredimo njegov algebarski prikaz) ako je: $|z| = 2$ i $\alpha = 60^\circ$.

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ) = 2(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 1 + \sqrt{3}i$$

Geometrijska interpretacija brojeva $\cos\alpha + i\sin\alpha$ **- jedinična kružnica.**

Brojevi $\cos\alpha + i\sin\alpha$ imaju modul 1, jer je $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ pa se nalaze na jediničnoj kružnici (Slika 26).



Sl. 26

Možemo zamišljati kako ti brojevi obilaze jediničnu kružnicu suprotno kazaljci sata (počevši od broja 1), dok se kut α mijenja od 0° do 360° (opet broj 1).

Također možemo zamišljati da se kut α sve više poveáva, pa dok se promijeni od $360°$ do $720°$, brojevi će još jednom obići kružnicu itd. Pritom za kutove

$$\alpha, \alpha + 360°, \alpha + 720°, ...$$

imamo iste kompleksne brojeve. Svi ti kutovi $\alpha + k \cdot 360°$, gdje k prolazi skupom cijelih brojeva, nazivaju se **argumentima**; oni su argumenti od istog kompleksnog broja z, pišemo

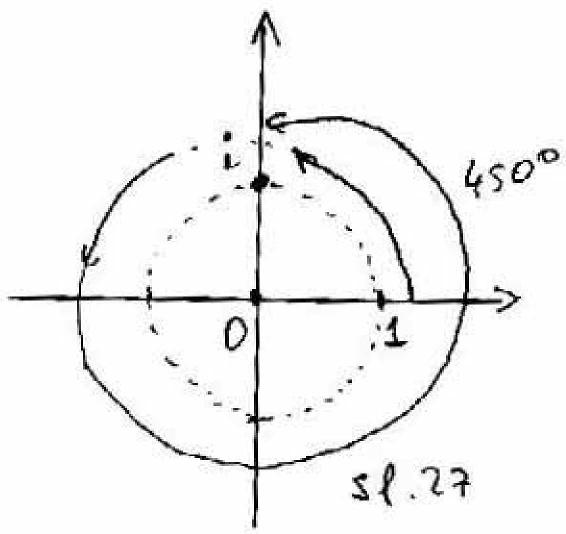
$$arg(z) = \alpha + k \cdot 360°$$

dok se $Arg(z)$ onda naziva **glavnim argumentom**.

Primjer 9. (i) $Arg(i) = 90°$ (glavni argument), dok su svi argumenti $arg(i) = 90° + k \cdot 360°$. Na primjer
za $k = 0$ dobijemo glavni argument
za $k = 1$ dobijemo argument

$$90° + 360° = 450°$$

To treba tumačiti tako da kad iz broja 1 kružimo jediničnom kružnicom za kut $450°$ **suprotno kazaljci sata** dolazimo u broj i (u međuvremenu ćemo jednom proći kroz i, ali ćemo nastaviti kruženje), slika 27.

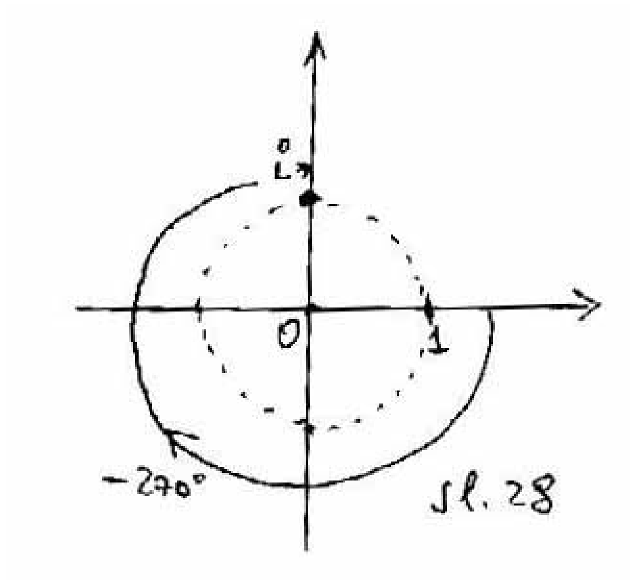


sl.27

Za $k = -1$ dobijemo argument

$$90° + (-1)360° = -270°$$

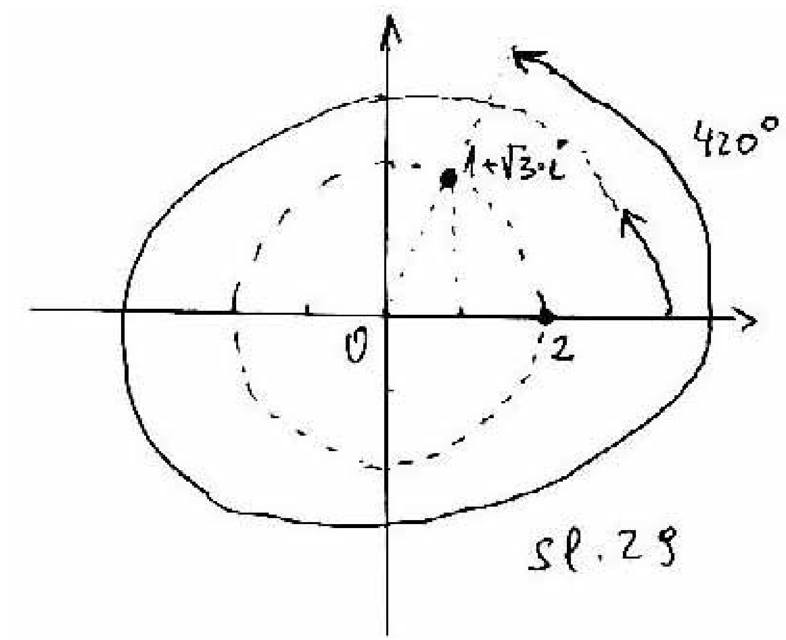
To treba tumačiti tako da kad iz broja 1 kružimo jediničnom kružnicom za kut $270°$ **u skladu s kazaljkom na satu** (zbog negativnog predznaka), dolazimo u broj i (Slika 28).



(ii) $Arg(1+\sqrt{3}i) = 60°$ (glavni argument - Primjer 8.), dok su svi argumenti $arg(1+\sqrt{3}i) = 60° + k \cdot 360°$. Na primjer
za $k = 0$ dobijemo glavni argument
za $k = 1$ dobijemo argument

$$60° + 360° = 420°$$

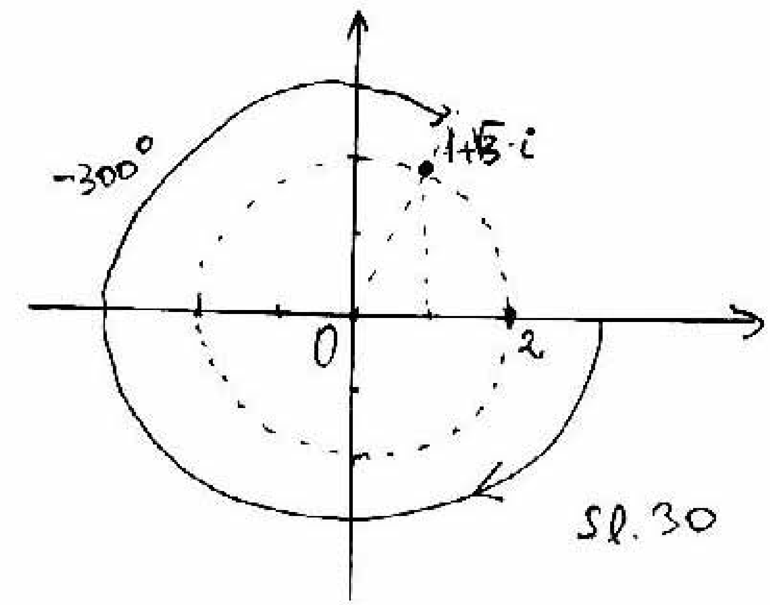
To treba tumačiti tako da kad iz broja 2 kružimo kružnicom polumjera 2 (jer kompleksni broj ima modul 2) za kut 420° **suprotno kazaljci sata** dolazimo u broj $1+\sqrt{3}i$ (u međuvremenu ćemo jednom proći kroz $1+\sqrt{3}i$, ali ćemo nastaviti kruženje), slika 29.



Za $k = -1$ dobijemo argument

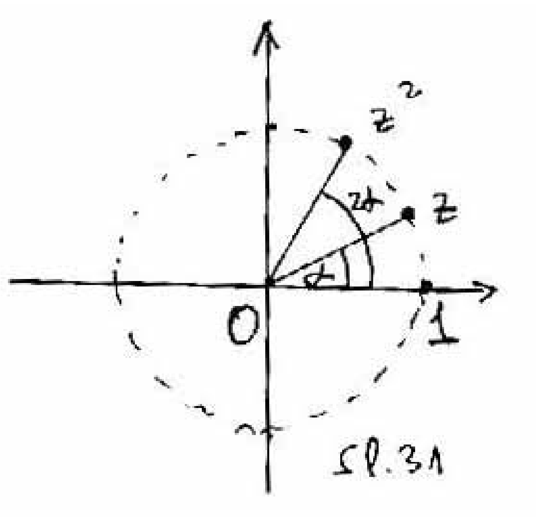
$$60^\circ + (-1)360^\circ = -300^\circ$$

To treba tumačiti tako da kad iz broja 2 kružimo kružnicom polumjera 2 za kut 300° **u skladu s kazaljkom na satu**, dolazimo u broj $1 + \sqrt{3}i$ (Slika 30).

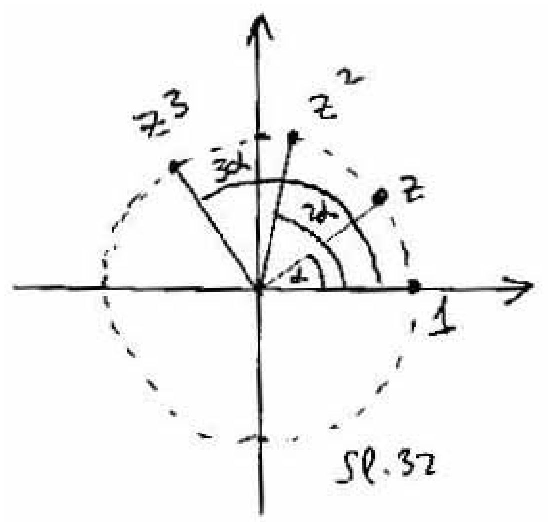


Geometrijska interpretacija potenciranja na jediničnoj kružnici - Moivreova formula.

Ako je $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$ (tj. ako je z na jediničnoj kružnici), onda je: $z^2 = \cos(2\alpha) + i\sin(2\alpha)$ tj. z se kvadrira tako da mu se argument udvostručuje (Slika 31).



Slično:
$z^3 = \cos(3\alpha) + i\sin(3\alpha)$ tj. z se kubira tako da mu se argument utrostručuje (Slika 32).

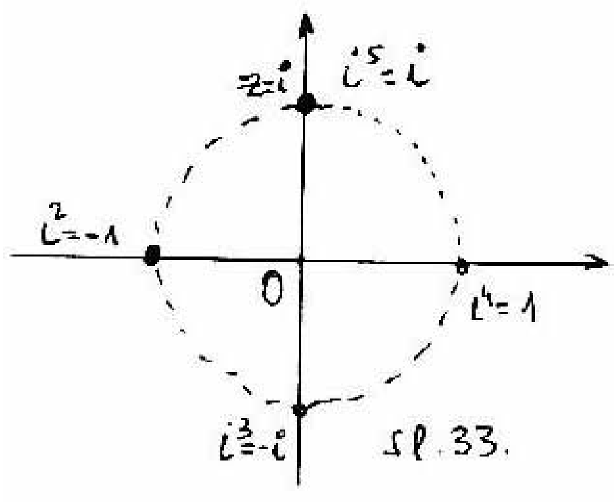


Općenito

$$z^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$$

tj. z se potencira tako da mu se argument pomnoži s eksponentom. To je **Moivreova formula**.

Primjer 10. Ako je $z = i$, onda je $z^2 = -1$, $z^3 = -i$, $z^4 = 1$, $z^5 = i, ...$ (Slika 33).



Vidimo da potencije ostaju na jediničnoj kružnici, samo se argument udvostručuje, utrostručuje itd. Naime, argumenti su, redom, $90°, 180°, 270°, 360°, ...$

Moivreova formula može se primijeniti na sve kompleksne brojeve različite od 0, a ne samo one modula 1 (na jediničnoj kružnici):

Ako je $z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, onda je $z^n = |z|^n(\cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha))$

Kompleksni se broj potencira tako da mu se apsolutna vrijednost potencira, a kut pomnoži eksponentom.

Primjer 11. Izračunajmo $(1+\sqrt{3}i)^5$.
Možemo računati izravno, samo što bi to bilo mukotrpno. Zato primjenjujemo Moivreovu formulu. Već znamo da je:
$|z| = 2$ i $\alpha = 60°$. Zato je
$z^5 = 2^5(\cos(5\cdot 60°) + i\sin(5\cdot 60°)) = 32(\cos 300° + i\sin 300°) =$
$32(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = 16 + 16\sqrt{3}i$

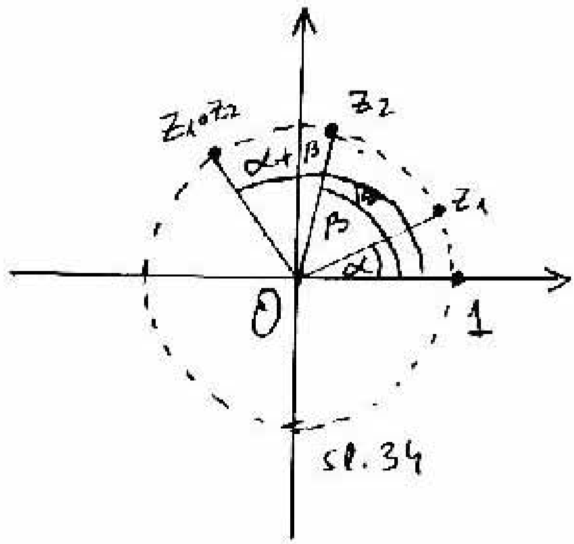
Množenje kompleksnih brojeva na jediničnoj kružnici. Uočimo dva kompleksna broja na jediničnoj kružnici:

$$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha,\ z_2 = \cos\beta + i\sin\beta$$

Tada je

$$z_1 z_2 = \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

Kompleksni brojevi na jediničnoj kružnici množe se tako da se argumenti zbroje. (Slika 34)



sl. 34

Uočite: ako u tu formulu stavite $\beta = \alpha$ dobit ćete formulu za kvadriranje broja na jediničnoj kružnici.

Formulu za množenje kompleksnih brojeva na jediničnoj kružnici možemo primjeniti i općenito:

Ako je

$$z_1 = |z_1|(\cos\alpha + i\sin\alpha),\ z_2 = |z_2|(\cos\beta + i\sin\beta)$$

onda je

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)$$

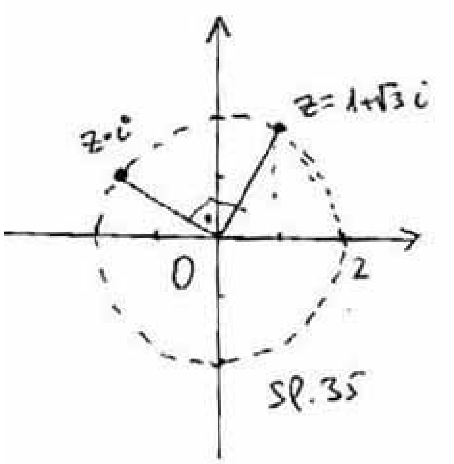
Kompleksni se brojevi množe tako da im se moduli pomnože, a argumenti zbroje.

Primjer 12. (primjena formule za množenje kompleksnih brojeva) Koji ćemo broj dobiti ako zarotiramo kompleksni broj $z = 1 + \sqrt{3}i$ za 90° suprotno kazaljci sata ?

Treba z pomnožiti s i (jer i ima kut od 90°, a modul 1, tako da će se u rezultatu kut povećati za 90°, a modul ostati isti). Dakle,

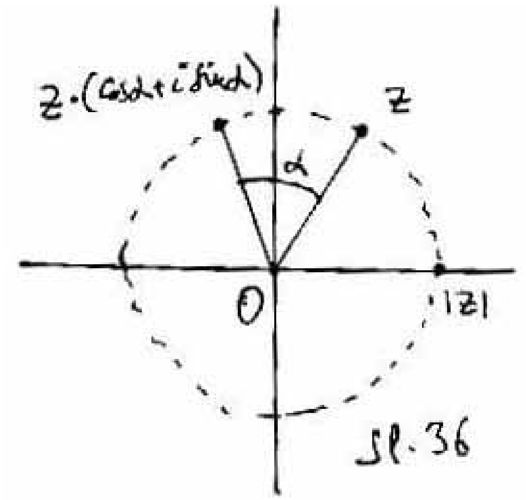
$$z' = z \cdot i = (1 + \sqrt{3}i)i = -\sqrt{3} + i$$

Provjerite na crtežu (Slika 35)!



Sl.35

Vidimo da vrijedi općenito, **ako broj pomnožimo s** $\cos\alpha + i\sin\alpha$**, zarotirat ćemo ga za** α (Slika 36).



Sl.36

Popis pojmova i oznaka

Algebarski (algebraic)
algebarska jednadžba (algebraic equation) - polinomska jednadžba: linearna (linear), kvadratna (quadratic), kubna (cubic), četvrtog stupnja (quartic), petog stupnja (quintic) itd.)
algebarska operacija (algebraic operation) - računska operacija: zbrajanje (addition), oduzimanje (subtraction), množenje (multiplication), dijeljenje (division)
Aproksimacija (approximation) - približna vrijednost.
Apsolutna vrijednost (absolute value, module)
Broj (number)
cijeli broj (integer)
čisto imaginarni broj (purely imaginary number)
decimalni broj (decimal number),
iracionalni broj (irrational number)
kompleksni broj (complex number), imaginarni dio (imaginary part), realni dio (real part)
kompleksno konjugirani brojevi (conjugate numbers, conjugates)
negativni broj (negative number)
pozitivni broj (positive number)
prirodni broj (natural number)
racionalni broj (rational number)
realni broj (real number)
recipročni broj (reciprocal, multiplicative inverse)
suprotni broj (negative of, additive inverse)
Brojevni pravac, koordinatni pravac (number line)
Jednadžba (equality)
Jednakost (equality)
Količnik, kvocijent (quotient)
Kompleksna ravnina (complex plane, Gauss plane, Argand plane)
Koordinatni sustav (coordinate system) - na pravcu, ravnini itd.
Polinom (polynomial)
stupanj p. (degree of p.)
Razlika (difference)
Razlomak (fraction)
brojnik (numerator)
nazivnik (denumerator)
Skraćivanje (cancellation)
Trigonometrijski prikaz (polar representation)
Umnožak, produkt (product)
Uređeni par (ordered pair)
Zbroj (sum)
Znanstvena notacija (scientific notation)